Получим те формулы, которые давались в СТО6 без вывода.
Если у нас есть дважды нижний тензор, то его компоненты преобразуются как

$$F'_{ik} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} F_{nm}$$

Отдельное искусство – считать формулы для тензоров. Чтобы подсчитать одну произвольную [i][k] компоненту матрицы, нужно два for: по m и n. А чтобы подсчитать все 16 компонент конечной матрицы, потребуется ещё два for: по i и k.
Это самая общая формула ***для любого дважды нижнего двензора*** и ***для перехода между любыми СК***. Даже неинерциальными и криволинейными.

Чтобы ей воспользоваться на практике, надо подсчитать 16 производных новых координат по старым.

Например, мы переходим из старой декартовой СК в сферическую:
Старые координаты: x, y, z, ct
Новые координаты: r, θ, φ, ct^I (это штрих такой).
Выражаем старые координаты через новые:
x=rsinθcosφ
y=rsinθsinφ
z=rcosθ
ct^I= ct
Считаем производные:
∂x/∂r=sinθcosφ
∂y/∂r=sinθsinφ
∂z/∂r=cosθ
∂x/∂θ=rcosθcosφ
∂y/∂θ=rcosθsinφ
∂z/∂θ=-rsinθ
∂x/∂φ=-rsinθsinφ
∂y/∂φ=rsinθcosφ
$\partial ct^I/\partial ct=1$
Остальные производные будут 0.

Кстати, если мы все эти производные запишем в матрицу, то её определитель как раз будет якобиан.

Ну а нас более интересует другой случай: переход между двумя декартовыми СК, одна из которых движется со бетой β вдоль оси x.

Выражаем старые координаты через новые:

$$x^0 = \frac{x'^0 + \beta x'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^1 = \frac{x'^1 + \beta x'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^2 = x'^2, \; x^3 = x'^3$$

И считаем 16 производных:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^1} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1$$

Остальные занулятся.

Итак, нам нужно подсчитать аж 16 компонент матрицы дважды нижнего двензора э/м поля в новой СК! Можно, однако, схитрить.

Мы предполагаем, что дважды нижний двензор э/м поля в новой СК имеет вид

$$F'_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -H'_z & H'_y \\ -E'_y & H'_z & 0 & -H'_x \\ -E'_z & -H'_y & H'_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, нам достаточно подсчитать всего 6 чисел: [0][1], [0][2], [0][3] (это мы подсчитаем E в новой СК), [3][2], [1][3], [2][1] (это мы подсчитаем H в новой СК). Первая цифра – номер строки, вторая – номер столбца.

Погнали. Считаем E'_x. Подставляем i=0, k=1:

$$F'_{01} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^0} \frac{\partial x^m}{\partial x'^1} F_{nm}$$

Раскроем суммирование по m и подставим найденные нам производные. Получим

$$F'_{01} = \sum_{n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^0} \left[\frac{\partial x^0}{\partial x'^1} F_{n0} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} F_{n1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} F_{n2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} F_{n3} \right] =$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial x^n}{\partial x'^0} F_{n0} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial x^n}{\partial x'^0} F_{n1}.$$

Ну а теперь если ещё мы и суммирование по n раскроем, то получим

$$F'_{01} = F_{01}$$

А эта компоненту двензора как раз отвечает за иксовую проекцию E:

$$F'_{01} = E'_x, \ F_{01} = E_x$$

Вот и получаем $E'_x = E_x$.

Аналогично получается

$$E'_x = E_x, \qquad H'_x = H_x,$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Вуаля, мы вывели эти преобразования!

Может, и сможем вывести инварианты **EH** и H^2-E^2?

Можно видеть, что тензором (т.е. инвариантом СК) будет вот такая вот вещь

$$\sum_{i,k} \text{Ш}_{i_1 k_1} \text{Ш}^{k_2 i_2} \delta^{i_1}_{i_2} \delta^{k_1}_{k_2}$$

Дважды свёрточное с использованием б-матрицы тензорное умножение. (Напомним, что Ш (или Щ, я его то так обозначаю, то так) – двензор э/м поля).

И более того, как можно видеть она будет даже скаляром. Если её аккуратно подсчитать, то получим $2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$

Как раз один из инвариантов.

Есть и более сложный инвариант:

$$\sum_{i,j,k,l} \text{Ш}_{i_1 k_1} \text{Ш}^{k_2 l_2} \text{Ш}_{l_1 j_1} \text{Ш}^{j_2 i_2} \delta^{i_1}_{i_2} \delta^{k_1}_{k_2} \delta^{j_1}_{j_2} \delta^{l_1}_{l_2}$$

Если его аккуратно вычислить, то получится

$$2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 4(\mathbf{EH})^2$$

Вычитая первый инвариант, и получим скалярное произведение.

Можно написать ещё инварианты, но они будут выражаться через наши старые два.